УДК 330.43

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКИХ УСЛОВНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНОГО АСИММЕТРИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛАПЛАСА

О.А. Бельснер, О.Л. Крицкий

Томский политехнический университет
E-mail: olegkol@mph.phtd.tpu.edu.ru, belsner@bk.ru

Предлагается модификация модели динамических условных корреляций. Модификация заключалась в отказе от предположения о многомерном нормальном распределении логарифмов приращений дневных котировок финансовых инструментов, вследствие ненулевых значений коэффициентов асимметрии и эксцесса, и в использовании асимметричного многомерного распределения Лапласа, позволяющего моделировать линейные комбинации одномерных случайных величин, что особенно важно при расчете предельной величины риска (Value-at-risk, VaR) для портфелей финансовых инструментов.

Понимание механизма взаимодействия финансовых величин является проблемой, довольно длительный период рассматриваемой в экономике. Переменные оказывают влияние друг на друга не только через первый, но и через второй моменты совместных распределений. Это означает, что изменение значения одной переменной может воздействовать не только на уровень другой, но и на степень изменчивости остальных переменных. Для достижения состоятельной, несмещенной и эффективной оценки данной зависимости предлагается большое количество эконометрических методов, позволяющих осуществить наиболее точный анализ.

В течение последних двадцати лет в финансовой эконометрике происходит активное развитие моделей, описывающих процессы изменения цен, основной особенностью которых является непостоянство безусловной или условной дисперсии.

Причины изменения дисперсии у финансовых показателей различны. Среди прочих можно выделить непредвиденные политические события, резкие колебания уровня предложения на рынке (например, вследствие поступления на рынок больших объемов валюты, товаров или ценных бумаг) или его сокращение (что, согласно закону спроса и предложения, приводит к росту цен). Очевидно, что изменения дисперсии цен финансовых инструментов оказывают существенное влияние на финансовые сделки вследствие увеличения рисков потерь.

Общий подход к построению моделей с изменяющейся дисперсией предполагает, что значение финансового показателя X_t в момент времени t определяется посредством уравнения:

$$X_t = \mu(t) + \sigma_t \varepsilon_t ,$$

где $\mu(t)$ – условное математическое ожидание процесса X_t, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ – стандартная нормально распределенная случайная величина, σ_t – условное стандартное отклонение.

Изучение изменений волатильности привело к появлению в начале 1980-х гг. класса моделей авторегрессии условной гетероскедастичности (ARCH) [1] вида:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \varepsilon^2_{i-j},$$

где α, β_i, $i=\overline{1,p}$ – некоторые скалярные параметры, причем $\alpha>0$, $\beta_i>0$. В ARCH-моделях предполагается зависимость волатильности от множественных шумов вида $\varepsilon_t^2 \sim N(a_i,\sigma_i^2)$.

За последние двадцать лет были разработаны многочисленные модификации ARCH-моделей, позволяющие отказаться от предположений о независимости волатильности от своих предыдущих значений и учесть автокорреляцию в них. Наиболее известной модификацией ARCH-модели является обобщенная модель авторегрессии условной гетероскедастичности (GARCH) [2] вида:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma^2_{i-j} + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \varepsilon^2_{i-j},$$

где α, β_j, γ_j, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ коэффициенты $\alpha>0$, $\beta_i>0$, $\gamma_i>0$, $\alpha + \sum_i \beta_i + \sum_i \gamma_i < 1$.

GARCH позволяет моделировать изменяющуюся во времени условную дисперсию в виде регрессионной зависимости от предыдущих ее значений по времени. Модели типа GARCH находят широкое применение в различных сферах, однако наибольшее распространение они получили в финансовой эконометрике при исследовании финансовых рынков, так как их существенным преимуществом являются свойства быстрого реагирования на любые наблюдаемые изменения и восстановления после сильных колебаний рынка [2].

В настоящее время имеется большое количество модификаций методов ARCH и GARCH. Наибольший интерес представляют многомерные обобщенные модели авторегрессии условной гетероскедастичности (MGARCH), учитывающие зависимость волатильности. Задачи оценки стоимости активов, опционов, выбора портфеля и расчета величины VaR являются примерами успешного применения моделей MGARCH [3].

Модели MGARCH могут быть использованы для оценки степени влияния волатильности финансовых рынков на такие величины как экспорт и производительность, а также при расчете изменяющихся во времени хеджирующих соотношений.

Основным недостатком использования MGARCH является то, что число оцениваемых в них параметров резко увеличивается по мере роста числа переменных. В большинстве случаев уже при 4-х рассматриваемых переменных произвести оценку соответствующих параметров затруднительно (минимальное число для различных моделей MGARCH равно 20).

В 1990 г. T. Bollerslev [4] предложил класс моделей с постоянными условными корреляциями, предполагающий, что условные ковариации пропорциональны произведениям соответствующих условных стандартных отклонений. Данное ограничение значительно уменьшает число неизвестных параметров и упрощает оценку. Тем не менее, предположение о постоянстве условных корреляций на практике оказывается недостижимым. В данной работе предлагается к рассмотрению класс моделей динамических условных корреляций (Dynamic Conditional Correlations, DCC [5]), учитывающий нелинейную природу изменения финансовых временных рядов и динамические свойства корреляций.

Модель динамических условных корреляций была предложена R. Engle и K. Sheppard в 2002 г. [5].

Рассмотрим некоторый n-мерный процесс для доходности некоторого актива $X_t \in R^{T\times n}$, $t=1...T$ [5]:

$$X_t = \mu_t(\theta) + H_t^{1/2}(\theta)\cdot\varepsilon_t,$$
$$\mu_t(\theta) = E(X_t\,|\Omega_{t-1}),$$
$$H_t = \mathrm{Var}(X_t\,|\Omega_{t-1}), \qquad (1)$$

где Ω_t – фильтр (доступная информация) на момент времени τ, а ε_t – нормально распределенные величины.

Пусть H_t – функция одномерных динамических переменных и динамических линейных корреляций вида:

$$H_t \equiv D_t R_t D_t, \qquad (2)$$

где $R_t = (Q_t^*)^{-1} Q_t (Q_t^*)^{-1}$.

Тогда Q_t можно определить по методологии GARCH(L,S):

$$Q_t = \left(1 - \sum_{l=1}^{L}\alpha_l - \sum_{s=1}^{S}\beta_s\right)\bar{Q} +$$
$$+\sum_{l=1}^{L}\alpha_l \varepsilon_{t-l}\varepsilon'_{t-l} + \sum_{s=1}^{S}\beta_s Q_{t-s},$$
$$Q_t^* = \mathrm{diag}\left\|\sqrt{q_{ii}}\right\|, \qquad (3)$$

где D_t – диагональная матрица с элементами $\sqrt{h_{it}}$ $i=1...n$, $t=1...T$, $\bar{Q}$ – безусловная ковариационная матрица ε_t, $\varepsilon_t=D_t^{-1}r_t$. Предполагается, что $\varepsilon_t \sim N(0,R_t)$, $\bar{Q}=E(\varepsilon_t\varepsilon_t')$, α_l, β_s – параметры (скаляр), удовлетворяющие условию: $\sum_{l=1}^{L}\alpha_l + \sum_{s=1}^{S}\beta_s < 1$, R_t – корреляционная матрица, H_t – положительно определенная матрица, характеризующая волатильность.

Запись R_t в виде (2) гарантирует универсальность корреляционной матрицы, а выражения для записи H_t и Q_t обеспечивают положительную определенность H_t.

Оценка параметров в (3) осуществляется двухшаговым методом максимального правдоподобия. При этом логарифмическая функция правдоподобия разбивается на две: одна для параметров, описывающих одномерную волатильность, другая – для параметров, определяющих корреляцию (так называемый двухшаговый DCC метод). Такой подход позволяет оценить системы, содержащие большое количество параметров.

На первом шаге вектор θ разбивается на два подвектора $\theta=(\xi,\varphi)$, где ξ содержит параметры волатильности, а φ – корреляции. Тогда логарифмическая функция правдоподобия запишется в виде:

$$L_T(\theta)=L_T(\xi)+L_T(\varphi|\xi).$$

Следовательно, процедура оценки на первом этапе сводится к определению максимума функции $L_T(\xi)$. На втором шаге, после нахождения оценки $\hat{\xi}$ переходят к максимизации функции $L_T(\varphi|\xi)$ и нахождению оценки $\hat{\varphi}$, принимая во внимание, что $\varepsilon_t=D_t^{-1}r_t$.

Для доходов финансовых активов свойственны ненулевые значения асимметрии и эксцесса, вследствие этого их нельзя описать с помощью нормального распределения. Выделяется несколько видов многомерных распределений, характеризующихся высоким уровнем коэффициентов эксцесса и асимметрии. Однако большинство таких распределений либо является слишком сложным для оценивания при помощи метода GARCH, либо обладает нежелательными свойствами (например, бесконечная дисперсия), что, естественно, снижает степень их использования для описания финансовых процессов.

Одним из распределений, достаточно точно описывающих основные свойства доходов финансовых инструментов и обладающих определенной гибкостью, является асимметричное многомерное распределение Лапласа, преложенное S. Kotz, T.J. Kozubowski и K. Podgorski в 2003 г. [6]. Одномерное распределение Лапласа или двойное экспоненциальное распределение широко используется в финансовом моделировании. В [6] асимметричное многомерное распределение рассматривается как подкласс геометрически устойчивых распределений (устойчивых при геометрическом суммировании). Данное свойство позволяет использовать асимметричное многомерное распределение Лапласа для моделирования линейных комбинаций случайных величин, подчиняющихся одномерному симметричному распределения Лапласа, что является особенно важным при расчете коэффициента VaR для портфелей финансовых инструментов. Отмечается, что данная особенность ранее считалась характерной лишь для Парето-устойчивых распределений и их частного случая, используемого наиболее часто – нормального распределения. Характерная черта класса устойчивых распределений состоит в том, что сумма случайных величин, подчиняющихся какому-либо устойчивому распределению, также распределена по этому закону. Устойчивые распределения, как правило, отличаются от нормального более медленным приближением плотностей распределений к оси ординат. Иными словами, на их «хвостах» накапливается вероятность более значительная, чем на «хвостах» нормальных распределений с теми же параметрами.

В геометрически стабильной модели [6] доход $r_{f(p)}$ рассматривается как сумма меньших доходов $r^{(i)}$ в течение периода времени $f(p)$.

$f(p)$ является случайной величиной с геометрической функцией распределения вероятности $P(f(p)=j)=p(1-p)^{j-1}$, $k=1,2,\ldots$ Геометрически стабильное распределение может быть приближено к нормированной сумме геометрически стабильных моделей, если параметр p случайной величины $f(p)$ стремиться к нулю. Иными словами, некий массив случайных величин X подчинен геометрически стабильному распределению на множестве $\Re^n$ тогда и только тогда, когда [6]:

$$a(p)\sum_{i=1}^{f(p)}(\kappa(p)+r^{(i)})\xrightarrow{\;p\;}X \quad \text{при} \quad p\longrightarrow 0, \quad (4)$$

где $\{r^{(d)}=(r_1^{(d)},\ldots r_n^{(d)}),\ d\geq 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в пространстве $\Re^n$, не зависящих от $f(p)$, $a(p)>0$, $\kappa(p)\in\Re^n$, $\xrightarrow{\;p\;}$ означает сходимость по распределению.

В данном случае многомерное асимметричное распределение возникает, когда существует ограничение для предела распределения – конечность второго момента.

В [6] было показано, что в случае, если каждый вектор r характеризуется средним m_i, $i=1,n$ и дисперсией σ_{ij}, $i=1,n$, $j=1,n$, а $a(p)=\sqrt{p}$ и $\kappa(p)=m(\sqrt{p}-1)$, случайная величина X, определяемая выражением (4), подчиняется AML-распределению с характеристической функцией:

$$\Psi(t)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}t'Ht-it'm},$$

где $t\in\Re^{n\times n}$ и $H\in\Re^{n\times n}$ – положительно определенная матрица с элементами σ_{ij}, $i=j$ на главной диагонали и недиагональными элементами σ_{ij}, $i\neq j$.

Функция многомерного асимметричного распределения Лапласа (AML) для изменяющихся во времени H_t и r_t имеет вид:

$$f(r)=\frac{2\exp(r_t'H_t^{-1}m)}{(2\pi)^{n/2}\left|H_t\right|^{1/2}}\left(\frac{r_t'H_t^{-1}r_t}{2+m'H_t^{-1}m}\right)^{\nu/2}\times$$
$$\times K_\nu\left(\sqrt{(2+m'H_t^{-1}m)(r_t'H_t^{-1}r_t)}\right),$$

где $\nu=(2-n)/2$ и $K_\nu(u)$ – модифицированная функция Бесселя третьего рода,

$$K_\nu=\frac{(u/2)^\nu\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_1^\infty e^{-ut}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt,$$
$$u>0,\quad \nu\geq -1/2.$$

Здесь вектор m – параметр положения, а матрица H – коэффициент масштаба данного распределения.

Одной из важных особенностей AML-распределения является тот факт, что оно унимодально с нулевой модой. Вследствие данного факта параметр m не только определяет среднее данного распределения, но также характеризует уровень асимметрии.

Обобщим предложенную модель динамических условных корреляций, для чего предположим, что остатки подчиняются AML-распределению.

Логарифмическая функция правдоподобия в случае асимметричного многомерного распределения Лапласа с учетом того, что $H_t \equiv D_t R_t D_t$, имеет вид:

$$L_{AML}(\theta) = \sum_{t=1}^{T} (r_t^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} m - \frac{1}{2}\ln\left|D_t R_t D_t\right| +$$
$$+\frac{v}{2}\ln(r_t^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t) - \ln(m^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} m) +$$
$$+\ln(K_v(\sqrt{(2+m' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} m)(r_t^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t)}) -$$
$$-\frac{n}{2}\ln(2\pi)).$$

Применим двухшаговую процедуру оценки:

$$L_{AML}(\xi) = \sum_{t=1}^{T} (r_t^{'} D_t^{-2} I_k m - \frac{1}{2}\ln\left|D_t^{-2} I_k\right| +$$
$$+\frac{v}{2}\ln(r_t^{'} D_t^{-2} I_k r_t) - \ln(m^{'} D_t^{-2} I_k m) +$$
$$+\ln(K_v(\sqrt{(2+m' D_t^{-2} I_k m)(r_t^{'} D_t^{-2} I_k r_t)}) - \frac{n}{2}\ln(2\pi)).$$

Так как $\varepsilon_t = D_t^{-1} r_t$ и $\varepsilon_t^* = m' D_t^{-1}$, имеем:

$$L_{AML}(\varphi|\xi) = \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_t R_t^{-1} (\varepsilon_t^*)^{-1} - \frac{1}{2}\ln\left|R_t\right| +$$
$$+\frac{v}{2}\ln(r_t^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t) - \ln(m^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} m) +$$
$$+\ln(K_v(\sqrt{(2+m' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} m)(r_t^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t)}) -$$
$$+\frac{n}{2}\ln(2\pi)).$$

Если принять $n=2s+3$, где $s=0,1,2,\ldots$, то $v = -\frac{s+1}{2}$, $K_v = K_{-v}$. В данном случае функция Бесселя может быть записана в виде:

$$f(r) = $$
$$= \frac{(2+m' H_t^{-1} m)^{s/2} \exp\left(\begin{array}{l} r_t^{'} H_t^{-1} m - \\ -\sqrt{(2+m' H_t^{-1} m)(r_t^{'} H_t^{-1} r_t)} \end{array} \right)}{(2\pi\sqrt{r_t^{'} H_t^{-1} r_t})^{s+1} \left|H_t\right|^{1/2}} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{s} \frac{(s+k)!}{(s-k)!k!} \cdot (2\sqrt{(2+m' H_t^{-1} m)(r_t^{'} H_t^{-1} r_t)})^{-k}.$$

Следовательно, логарифмическая функция правдоподобия примет вид:

$$L_{AML}(\theta) = \sum_{t=0}^{T} \{ \frac{s}{2}\ln(2+m' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} m) + r_t^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} m -$$
$$-\sqrt{(2+m' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} m)(r_t^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t)} +$$
$$\ln\{ \sum_{k=0}^{s} \frac{(s+k)!}{(s-k)!k!} \times$$
$$\times (2\sqrt{(2+m' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} m)(r_t^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t)})^{-k} \} -$$
$$-(s+1)\ln(2\pi) -$$
$$-\frac{(s+1)}{2}\ln(\sqrt{r_t^{'} D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t}) - \frac{1}{2}\ln\left|D_t R_t D_t\right| \}.$$

Применим двухшаговую процедуру оценки:

$$L_{AML}(\xi) = \sum_{t=0}^{T} \left\{ \frac{s}{2}\ln\left(2+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^2}{h_{it}}\right) - \frac{(s+1)}{2}\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{r_{it}^2}{h_{it}}\right) + \right.$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_{it} m_i}{h_{it}} - \ln(\sqrt{h_{it}}\right) - \sqrt{\left(2+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^2}{h_{it}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{r_{it}^2}{h_{it}}\right)} +$$
$$\ln\left\{ \sum_{k=0}^{s}\frac{(s+k)!}{(s-k)!k!}\left(2\sqrt{\left(2+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i^2}{h_{it}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{r_{it}^2}{h_{it}}\right)}\right)^{-k} \right\} -$$
$$-(s+1)\ln(2\pi).$$

$$L_{AML}(\varphi|\xi) = \sum_{t=0}^{T} \{ \frac{s}{2}\ln(2+\varepsilon_t^* R_t^{-1} (\varepsilon_t^*)^{'}) -$$
$$-\frac{(s+1)}{2}\ln(\varepsilon_t^{'} R_t^{-1} \varepsilon_t^{'}) - \frac{1}{2}\ln\left|R_t\right| + \varepsilon_t^{'} R_t^{-1} (\varepsilon_t^*)^{'} -$$
$$-\sqrt{(2+\varepsilon_t^* R_t^{-1} (\varepsilon_t^*)^{'})(\varepsilon_t^{'} R_t^{-1} \varepsilon_t)} +$$
$$+\ln\left\{ \sum_{k=0}^{s}\frac{(s+k)!}{(s-k)!k!}(2\sqrt{(2+\varepsilon_t^* R_t^{-1} (\varepsilon_t^*)^{'})(\varepsilon_t^{'} R_t^{-1} \varepsilon_t)})^{-k} \right\} -$$
$$-(s+1)\ln(2\pi)\}.$$

Применяя метод максимального правдоподобия, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_{AML}(\xi)}{\partial h_{it}} = 0 \\ \dfrac{\partial L_{AML}(\varphi|\xi)}{\partial R_t} = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Таким образом, предложена модификация модели динамических условных корреляций (2). Так как предположение о нормальном распределении не отражает действительного поведения рисковых активов на финансовых рынках, было использовано многомерное несиметричное распределение Лапласа. Получена система уравнений (5), решение которой однозначно определяет неизвестные коэффициенты в (3). Найденные коэффициенты детерминируют предлагаемую модель и позволяют использовать ее при анализе эмпирических данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Engle R. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kindom Inflation // Econometrica. – 1982. – V. 50. – P. 987–1001.
2. Bollerslev T. Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity // Journal of Econometrics. – 1986. – V. 31. – P. 307–327.
3. Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K. Multivariate GARCH models: a survey // Econometrica. – 2003. – № 4. – P. 459–464.
4. Bollerslev T. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH approach // Review of Economics and Statistics. – 1990. – № 72. – P. 498–505.
5. Engle R., Sheppard K. Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH // NBER Working papar series. – 2001. – № W8554.
6. Kotz S., Kozubowski T.J., Podgorski K. An asymmetric multivariate Laplace Distribution // Mathematical and computer modeling. – 2003. – № 34. – P. 1003–1021.

УДК 681.5